

全变差数字滤波器与 Ridgelet 变换相结合的图像去噪方法

万洪林, 彭玉华, 曲怀敬

(山东大学信息科学与工程学院, 山东济南 250100)

摘要: 针对 Curvelet 变换采用的金字塔分解对图像细节表现的不足, 我们提出利用全变差数字滤波器提取图像细节, 然后对其采用基于分数阶傅立叶变换和投影-切片定理的 Ridgelet 变换, 在变换域中由极小化极大误差准则进行阈值估计并对变换域系数进行阈值处理, 以实现图像去噪. 与金字塔分解相比, 全变差数字滤波器能够简化图像分解并得到包含几乎所有细节的单幅图像, 从而更有利于在 Ridgelet 域中进行降噪处理. 实验结果表明, 相对于 Ridgelet 和 Curvelet 变换的去噪方法, 本文方法在抑制噪声的同时具有更有效的边缘保护能力, 同时消除了边缘处的振荡, 并且相对于 Curvelet 变换节省了计算.

关键词: 图像去噪; 全变差数字滤波器; Ridgelet 变换; Curvelet 变换; 偏微分方程

中图分类号: TP391 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112(2008)01-0090-05

Image Denoising Method with Combination of Digital TV Filter and Ridgelet Transform

WAN Hong-lin, PENG Yu-hua, QU Hua-jing

(School of Information Science and Engineering, Shandong University, Jinan, Shandong 250100, China)

Abstract: Since inefficient representation for details with Pyramid decomposition in Curvelet transform, we propose a new image denoising method, which extracts details by Digital TV filter and then applies Ridgelet transform to it. The Ridgelet transform here is based on Fractional Fourier transform and Projection Slice theorem, and its coefficients are thresholded according to Minimax error criterion of wavelet. The Digital TV filter, compared with Pyramid decomposition, facilitates denoising in Ridgelet domain because it simplifies image decomposition and obtains a single image containing all edge information. Experiments show that our approach performs better than Ridgelet and Curvelet transform in protecting edges and reducing noise, and it eliminates oscillating patterns near edges. Furthermore, its computation is less fairly than Curvelet transform.

Key words: image denoising; digital total variation filter; ridgelet transform; curvelet transform; PDEs

1 引言

图像去噪的难点在于抑制噪声的同时保护边缘. 在近年来提出的多尺度几何分析(Multiscale Geometric Analysis, GMA)方法中, Ridgelet 变换^[1,2]通过 Radon 变换将图像中的线奇异性转变为点奇异性, 然后在 Radon 域中进行一维小波变换, 通过点奇异性检测来实现线奇异性检测; 而 Curvelet 变换^[3-5,16]则通过子带分解和 Ridgelet 变换实现了多尺度多方向的边缘表示. 与 Ridgelet 相比, Curvelet 变换在图像表示上更具优势, 但它是一个复杂的多尺度、多方向的图像分析框架. 它采用拉普拉斯金字塔(Laplacian Pyramid, LP)^[6]进行子带分解, 图像边缘由多个子带表示, 每个都要进行 Ridgelet 变换, 计算复杂.

源自偏微分方程(Partial Differential Equations, PDEs)的TV(Total Variation)模型是一类重要的图像分析和处

理工具. 它肇始于 ROF(Rudin-Osher-Fatemi)图像恢复模型^[7,8]; Chan 等在其基础上提出了全变差数字滤波器(Digital TV filter)^[9]. 它们的一个重要应用是图像分解^[10,11], 即将图像分为平滑的“卡通”部分和集中了几乎所有边缘的细节部分. 这也为本文方法提供了思路.

我们将全变差数字滤波器与 Ridgelet 变换相结合应用于图像去噪: 首先通过滤波器分解噪声图像, 得到概貌和细节两部分; 再对细节图像进行 Ridgelet 去噪. 全变差数字滤波器将细节集中于单幅图像, 从而得到边缘的有效表示. 实验表明, 本文方法能更好地保护细节, 同时减少了边缘处的振荡. 此外, Ridgelet 变换的数字实现也是图像处理领域的一个热点. 一种实现方式是有限 Ridgelet 变换(Finite Ridgelet Transform, FRIT)^[2]. 这是一种离散正交变换, 计算速度快. 但因其基于模 p 运算, 必然引入环绕效应. 另一种方式则基于投影-切片定理^[12]. 这种方法较 FRIT 运算复杂却更精确, 无环绕效

收稿日期: 2006-09-25; 修回日期: 2007-06-04

基金项目: 教育部留学回国人员科研启动基金重点项目(No. 2004-176-4); 山东省自然科学基金(No. 2004ZRC03061)

应,难点在于傅立叶域插值. 本文采用第二种方法,将分数阶傅立叶变换(Fractional Fourier Transform, FrFT)^[13]引入 Radon 变换,进而实现 Ridgelet 变换.

2 全变差数字滤波器

近年来,基于偏微分方程的全变差方法的研究在图像处理领域非常活跃^[10,11]. 引入偏微分方法的一个重要原因是,数学界对这种方法有长期深入的研究,多种成熟的算法可以提供准确和稳定的数值解. ROF 模型开创了基于全变差的图像处理方法. Chan 等在其基础上提出了全变差数字滤波器. 两者都是局部边缘方向自适应的低通滤波器,是图像分解的重要方法^[10].

设 $u(x)$ 为原始图像, $n(x)$ 为高斯白噪声, $u^0(x)$ 为噪声图像,那么

$$u^0(x) = u(x) + n(x) \quad (1)$$

其中 $E\{n(x)\} = 0$, $E\{N^2(x)\} = \sigma^2$. 连续信号 u 的全变差定义为

$$TV[u] = \int_{\Omega} |\nabla u| dx \quad (2)$$

Ω 为连续信号域,为其 dx 单位面积, ∇u 为 u 的梯度. 由噪声特性,得到约束条件

$$\int_{\Omega} u dx = \int_{\Omega} u^0 dx, \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} (u - u^0)^2 dx = \sigma^2 \quad (3)$$

$|\Omega|$ 为图像面积. 引入拉格朗日乘子 λ , 定义 ROF 模型的能量泛函为

$$J[u] = \int_{\Omega} |\nabla u| dx + \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} (u - u^0)^2 dx \quad (4)$$

式(4)的欧拉-拉格朗日方程为

$$-\nabla \cdot \left[\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right] + \lambda(u - u^0) = 0 \quad (5)$$

即式(5)成立时 $J[u]$ 最小. 由梯度下降法得

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nabla \cdot \left[\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right] + \lambda(u - u^0) \quad (6)$$

全变差数字滤波器实质上就是对上述极值问题的数值逼近.

对于数字图像,设 α 和 β 为像素点,像素值分别为 u_{α} 和 u_{β} . 若他们相互连接,记做 $\alpha \sim \beta$. 定义 α 的梯度为

$$|\nabla_{\alpha} u| := \sqrt{\sum_{\beta \sim \alpha} (u_{\beta} - u_{\alpha})^2} \quad (7)$$

其中 β 是 α 的 8 点邻域的像素集合. 正则化梯度定义为

$$|\nabla_{\alpha} u|_a = \sqrt{|\nabla_{\alpha} u|^2 + a^2} \quad (8)$$

a 称为正则化参数,通常为较小的正数,滤波器对它并不敏感. 正则化梯度表征了中心像素与相邻像素的近似程度,其定义式(7)中的求和过程能够有效抑制噪声对自身的影响.

对于噪声图像 u^0 的每一像素点 α ,经全变差数字滤波器 F_a^{λ} 滤波后的输出为

$$v_{\alpha} = F_a^{\lambda} u^0(\alpha) = \sum_{\beta \sim \alpha} h_{\alpha\beta}(u) u_{\beta} + h_{\alpha\alpha}(u) u_{\alpha}^0 \quad (9)$$

其中

$$h_{\alpha\beta}(u) = \frac{\omega_{\alpha\beta}(u)}{\lambda + \sum_{\beta \sim \alpha} \omega_{\alpha\beta}(u)} \quad (10)$$

$$h_{\alpha\alpha}(u) = \frac{\lambda}{\lambda + \sum_{\beta \sim \alpha} \omega_{\alpha\beta}(u)} \quad (11)$$

$$\omega_{\alpha\beta} = \frac{1}{|\nabla_{\alpha} u|_a} + \frac{1}{|\nabla_{\beta} u|_a} \quad (12)$$

显然, $h_{\alpha\alpha} + \sum_{\beta \sim \alpha} h_{\alpha\beta} = 1$. 从式(10)-(12)可以看出,加权系数与中心像素和它相邻像素的梯度的倒数和有关,在 λ 一定时梯度越大 $\omega_{\alpha\beta}$ 越小,这意味着中心像素 α 与相邻像素 β 相差越大,即加权系数越小,反之越大;并且由于梯度有效抑制了噪声对加权系数的影响,边缘得到保护,非边缘方向的噪声被抑制. 滤波器有适配参数 λ 和正则化参数 a . λ 决定了滤波器如何在边缘保护和平滑噪声间取得平衡,其选取依赖于噪声水平 σ . 噪声越大, λ 越小,平滑作用越明显,边缘损失越大;反之则 λ 取值越大,边缘保护越明显.

全变差数字滤波器采用迭代策略,即对于图像中的每一像素点 α ,有

$$u_{\alpha}^{(k)} = F_a^{\lambda} u^0(u^{(k-1)})$$

$u_{\alpha}^{(k)}$ 是 α 经 k 次迭代后的像素值. 特别地,由于图像在迭代过程中不断变化,需要适时更新^[9]:

$$\lambda = \frac{1}{\sigma^2} \frac{1}{|\Omega|} \sum_{\alpha \in \Omega} \sum_{\beta \sim \alpha} \omega_{\alpha\beta} (u_{\beta} - u_{\alpha})(u_{\alpha} - u_{\alpha}^0) \quad (13)$$

这里 σ^2 是图像噪声方差,需要估计; $|\Omega|$ 是图像的面积. 通常 λ 被初始化为 $1/\sigma^2$.

3 Ridgelet 变换和 Curvelet 变换

3.1 Ridgelet 变换

设 Ψ 是一个单变量、有足够时延和消失矩的光滑函数,且 $\int \Psi(t) dt = 0$. 对于 $a > 0$, $b \in R$, $\theta \in [0, 2\pi)$, 连续 Ridgelet 变换被定义为 $R^2 \rightarrow R^2$ 的映射

$$\Psi_{a,b,\theta}(x_1, x_2) = a^{-1/2} \Psi((x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta - b)/a)$$

其中 $x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta = \text{常数}$. 对于二元可积函数 $f(x)$, 其 Ridgelet 变换为

$$R_f(a, b, \theta) = \int \Psi_{a,b,\theta}(x) f(x) dx$$

精确重构公式为

$$f(x) = \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} R_f(a, b, \theta) \Psi_{a,b,\theta} \frac{da}{a^3} db \frac{d\theta}{d\pi}$$

Ridgelet 变换实质是 Radon 域中沿径向的一维小波变换(图 1). 对于函数 f , 设 $(\theta, t) \in [0, 2\pi) \times R$, 其 Radon 变换为

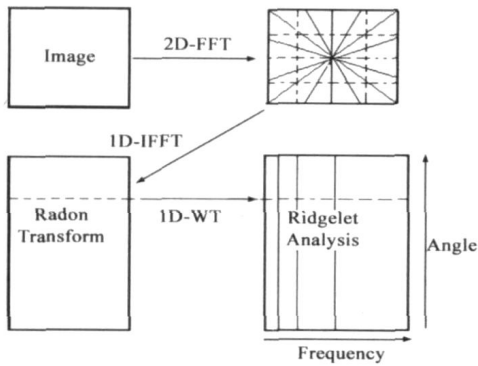


图1 Ridgelet变换

$Rf(\theta, t) = \int f(x_1, x_2) \delta(x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta - t) dx_1 dx_2$ 那么函数 f 的 Ridgelet 变换为

$$Rf(a, b, \theta) = \int Rf(\theta, t) a^{-1/2} \Psi((t-b)/a) dt.$$

3.2 Curvelet 变换

Curvelet 变换通过多尺度下的 Ridgelet 变换克服了 Ridgelet 变换对曲线逼近的不足^[4,5]. Donoho 和 Candès 提出了非自适应策略的 Curvelet 紧框架^[3], 对于在光滑曲线处不连续的目标函数, 它能够提供一个稳定、有效和近似最优的表示. Curvelet 变换先将图像进行子带分解, 得到不同尺度的上的边缘信息, 再对这些子带图像进行 Ridgelet 变换, 在多尺度下进行直线检测, 从而实现对曲线的逼近.

3.3 基于分数阶傅立叶变换的 Radon 变换的实现方法

Ridgelet 变换实质是 Radon 域中沿径向的小波变换. 本文采用 Averbuch 等^[12,15] 提出方法实现 Radon 变换: 首先计算二维平面伪极坐标(图2)的傅立叶系数, 再沿径向进行傅立叶逆变换得到 Radon 系数. 如何实现傅立叶域精确插值是这一方法的关键. 我们利用分数阶傅立叶变换(Fractional Fourier Transform, FrFT)^[13] 实现了频域伪极坐标网格的采样, 保证了径向采样点的精确插值.

由图2, 二维傅立叶平面被分为 BV 和 BH. 以 BV 为例说明采样点的计算过程. 设原始图像大小为 $N \times N$, N 为偶数. (1) 首先在原始图像上下各补 $((N/2)+1) \times N$ 和 $(N/2) \times N$ 的全零矩阵, 使其扩展为 $(2N+1) \times N$ 的矩阵; (2) 然后先沿垂直方向在区间 $[-\pi, \pi]$ 上进行 $2N+1$ 点的 FFT; (3) 在得到的矩阵右边补一列零向量, 再沿水平方向在区间 $[-\pi, \pi]$ 进行 $N+1$ 点相应阶数的分数阶傅立叶变换, 其中最上一行和最下一行的阶数为 1, 原点处为零, 其余行的阶数从 0 到 1 以 $1/N$ 为间隔均匀增加, 距原点越近阶数越小. 补零的作用在于消除环绕现象和使矩阵实现如图 2(a) 所示的采样结构. BH 的计算与 BV 类似. 这样我们得到了伪极坐标下的傅立叶变换, 包括 BV 和 BH. 只须沿径向进行傅立叶逆

变换, 就得到 Radon 系数. 分数阶傅立叶变换的快速算法由 Chirp-Z 算法实现^[13].

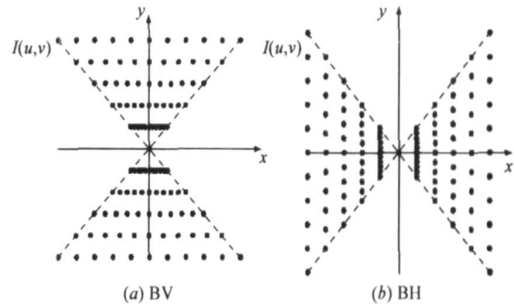


图2 伪极坐标采样网格

对于 Radon 逆变换, 采取与上述相反的步骤即可. 需要指出, 由于正变换过程中除边界行(列)处外, 其余行(列)的 FrFT 因其采样点没有完全覆盖区间 $[-\pi, \pi]$ 而不能完全重构. 我们采用共轭梯度法进行迭代:

$$f_{k+1} = f_k - DT_{PP}^H (T_{PP} f_k - f)$$

这里 f 表示原始空域信号在伪极坐标变换后得到的数据, f_k 为重构信号, k 为迭代次数, T_{PP} 为从空域到伪极坐标的变换操作符, T_{PP}^H 为其共轭, D 为加权矩阵.

4 全变差数字滤波器与 Ridgelet 变换相结合的图像去噪方法

Ridgelet 和 Curvelet 应用于图像去噪各有不足. 前者直接将图像分块进行变换, 图像块的平均灰度显然会对边缘提取产生影响, 分块无论重叠与否都会产生方块效应. 而后者是一个复杂的多尺度、多方向的图像表示框架, 实现的第一步是利用金字塔模型^[6,14] 进行子带分解以提取图像细节, 因此子带分解对变换的性能有重要影响. 相对于全变差数字滤波器, Curvelet 所采用的拉普拉斯金字塔^[6] 的图像分解有出下列不足: 第一, 图像的边缘信息表现在多个子带图像中, 而 Digital TV 则只将图像分为相当平滑的“卡通”图像和几乎集中了所有细节的图像, 因此通过 Digital TV 得到的细节图像中边缘信息比 LP 的各个子带的更为丰富; 第二, Curvelet 变换必须对多个子带进行处理, 计算复杂, 而 Digital TV 滤波器代替 LP 后只得一幅细节图像; 第三, LP 的子带图像局部也含有一定的非细节成份(图4), 而经 Digital TV 得到的细节图像几乎没有(图3).



图3 Digital TV 实现的图像分解

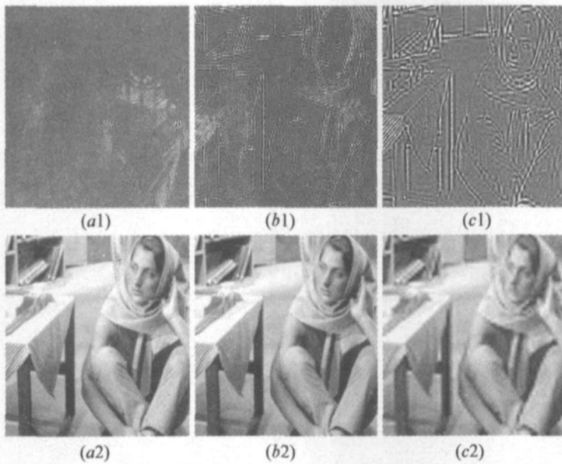


图 4 LP 实现的图像分解。(a1)(b1)(c1)为原始图像经 LP 分解,再将所有高频子代进行重构得到的图像,分解层数分别为 1、2 和 3。(a2)(b2)(c2)分别为 (a1)(b1)(c1)与原始图像的差值图像

综合全变差数字滤波器、Ridgelet 变换和 Curvelet 变换各自的特点,我们得到如下去噪方案:以全变差数字滤波器代替金字塔分解实现边缘提取,再对细节图像采用 Ridgelet 变换。设全变差数字滤波器为 F , Ridgelet 操作符为 Rid , 算法如下:

(1) 利用全变差数字滤波器将原始图像 s 分为卡通部分 m 和细节部分 n , 即 $s = m + n$, 其中, $m = F(s)$, $n = (s - F(s))$;

(2) 对细节部分 n 进行局部重叠的 Ridgelet 变换, 得到系数 $Rid(n)$ 。(a) 采用局部重叠分块方法对 n 进行划分, (b) 每个块都进行 Ridgelet 变换, 即首先对图像块进行基于分数阶傅立叶变换的 Radon 变换, 再沿角度方向将 Radon 系数延展为一维序列。所有块所对应的一维序列的全体即为 $Rid(n)$;

(3) 利用极小化极大准则对每个块对应的一维序列进行小波变换和阈值处理, 得到 $Rid'(n)$;

(4) 对 $Rid'(n)$ 进行 Ridgelet 重构, 得到 n' , 即将每个块的 Ridgelet 重构图像按所在位置叠加, 再对重叠部分取相应的平均;

(5) 将 n' 与卡通部分 m 相加, 得到去噪的图像 s' , 即 $s' = m + n'$ 。

关于适配参数 λ 的选择, 由于图像细节的提取不必考虑滤波器对原始图像产生的过度平滑问题, 我们就以第 2 节提到的 $1/\sigma^2$ 作为 λ 的初始值, σ^2 为图像噪声方差的估计值, 估计方法由 Rank 等提出^[18]。同时在图像分解中为简便运算, 我们进行了四次迭代, 且全部以 $1/\sigma^2$ 作为 λ 的值。

5 实验结果及分析

我们对图像 Lena(256 × 256) 和 Barbara(512 × 512)

分别采用 Ridgelet、Curvelet 和本文方法进行实验, 加入的高斯白噪声均值为零, 标准差 σ 分别为 5、10、15 和 20。在 Ridgelet 去噪中, 我们将图像分为大小为 32×32 的块, 并且在水平和垂直方向相邻的块重叠一半的面积, 再对每个块进行基于分数阶傅立叶的 Radon 变换; 其后的小波变换采用 Daubechies-3 小波, 分解三层。经过实验, 选择使风险极小化极大的软阈值策略对 Ridgelet 系数进行处理。在 Curvelet 去噪中, 我们通过 LP 对 Lena 和 Barbara 各分解了三层, 对前两层进行上述有图像块重叠的 Ridgelet 变去噪。其中 Lena 第一层采用 32×32 的图像块, 第二层为 16×16 ; Barbara 的两层均采用 32×32 的块。对于本文算法, 我们将由 Digital TV 提取的细节图像划分为 32×32 的水平和垂直方向各重叠一半面积的块, 再对每个块进行如上所述的 Ridgelet 去噪, 阈值选取准则也相同。三种方法的去噪结果见图 5。



图 5 按列从左到右依次为小波 VisuShrink、ridgelet、curvelet 和本文方法的去噪结果, 其中噪声标准差为 20

由图 5 看出, 直接对图像进行 Ridgelet 去噪会产生方块效应, 这与分块时每个图像块有不同的平均灰度有关; 而 Curvelet 和本文方法则将其克服。因此在去噪时将图像概貌与细节分离是必要的。结果还显示 Curvelet 在边缘保持方面不及本文方法, 这说明 Curvelet 在非线性去噪后, 多层子带通过滤波器重构会引起重构图像的误差扩散, 尤其在边缘附近。这一点与小波类似。

6 结论

本文方法通过全变差数字滤波器对图像进行分解, 得到卡通和细节两部分, 其中细节部分可以有效表示图像的边缘信息。随后的 Ridgelet 去噪在保持边缘的同时有效抑制了噪声。实验结果表明, 相对于 Curvelet 变换, 本文方法突出了图像边缘而且减少了边缘处的由于非线性操作引入的振荡; 相对于 Ridgelet 则减少了方块效应。

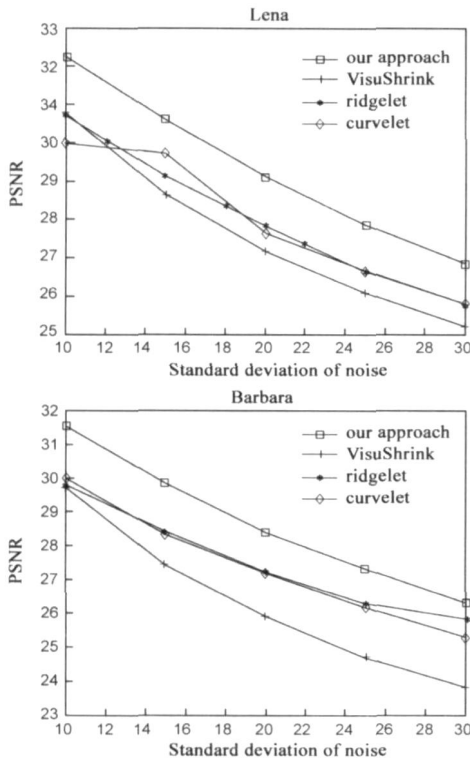


图 6 不同噪声水平下去噪图像的 PSNR 曲线

参考文献:

- [1] E J Candès, D L Donoho. Ridgelets: the key to higher dimensional intermittency? [J]. Phil Trans R Soc Lond A, 1999, 357: 2495– 2509.
- [2] M Do, M Vetterli. The finite ridgelet transform for image representation[J]. IEEE Trans Image Process, 2003, 12(1): 16– 28.
- [3] E J Candès, D L Donoho. Curvelets: A Surprisingly Effective Non Adaptive Representation for Objects with Edges[M]. Saint Malo: Vanderbilt University Press, 1999.
- [4] D Donoho, M Duncan. Digital Curvelet transform: strategy, implementation and experiments[A]. Proc. Aerosense Wavelet Applications VII[C]. Orlando, Fla., SPIE: Bellingham Washington, 2000, 4056: 12– 29.
- [5] J L Starck, E Candès, D Donoho. The Curvelet transform for image denoising[J]. IEEE Trans Image Process, 2002, 11(6): 131– 141.
- [6] M Do, M Vetterli. Framing pyramids[J]. IEEE Trans Signal Process, 2003, 51(9): 2329– 2342.
- [7] L Rudin, S Osher, E Fatemi. Nonlinear total variation noise removal algorithm[J]. Phys D, 1992, 60(1): 259– 268.
- [8] L Rudin, S Osher. Total variation based image restoration with free local constraints[A]. Proc 1st IEEE Int Conf Image Process[C]. Austin, TX: IEEE Press, 1994, 1: 31– 35.
- [9] T F Chan, S Osher, J H Shen. The digital TV filter and nonlinear denoising[J]. IEEE Trans Image Process, 2001, 10(2): 231

– 241.

- [10] A Haddad, Y Meyer. Variational methods in image processing [R]. Los Angeles, CA: UCLA Mathematics Department, 2004.
- [11] T Chan, S Esedoglu, F Park, A Yip. Recent development in total variation image restoration[R]. Los Angeles, CA: UCLA Mathematics Department, 2004.
- [12] Y Shkolnisky, A Averbuch, D L Donoho. 2D Fourier based discrete radon transform[R]. Tel Aviv: Tel Aviv University, 2002.
- [13] D H Bailey, P Swartztrauber. The fractional Fourier transform and applications[J]. SIAM Review, 1991, 33(3): 389– 404.
- [14] P J Burt, A E Adelson. The Laplacian pyramid as a compact image code[J]. IEEE Trans Commun, 1983, 31(4): 532– 540.
- [15] A Averbuch, R Coifman, D Donoho, M Israeli, J Walden. Fast slant stack: a notion of radon transform for data in a cartesian grid which is rapidly computible, algebraically exact, geometrically faithful and invertible[J]. SIAM J. Sci. Comput. to appear.
- [16] B Sævarsson, J Sveinsson, J Benediktsson. Combined wavelet and Curvelet denoising of SAR images[A]. IEEE Proc I-GARSS 2004[C]. Oakland: IEEE Computer Press, 2004. 4235– 4238.
- [17] S Osher, J H Shen. Digitized PDE method for data restoration [A]. Handbook of analytic computational methods in applied Mathematics[M]. Boca Raton, FL: Chapman and Hall/CRC Press, 2000. 259– 268.
- [18] K Rank, M Lendl, R Unbehauen. Estimation of image noise variance[J]. IEE Proc Vision, Image and Signal Processing, 1999, 146(2): 80– 84.

作者简介:



万洪林 男, 1979 年 12 月生于山东德州.

山东大学信息科学与工程学院博士生, 主要研究方向为图像处理、视频编码和图像多尺度几何分析. E-mail: visage1979@sdu.edu.cn



彭玉华 女, 1966 年 5 月生于山东梁山, 山

东大学信息科学与工程学院教授, 博士生导师. 主要研究方向为小波分析与应用、数字信号处理、微波工程、生物医学工程、图像多尺度几何分析和视频编码.

曲怀敬 男, 1965 年 1 月生于山东牟平, 山东大学信息科学与工程学院博士生. 主要研究方向为图像处理、生物医学工程和多尺度几何分析及工程应用.